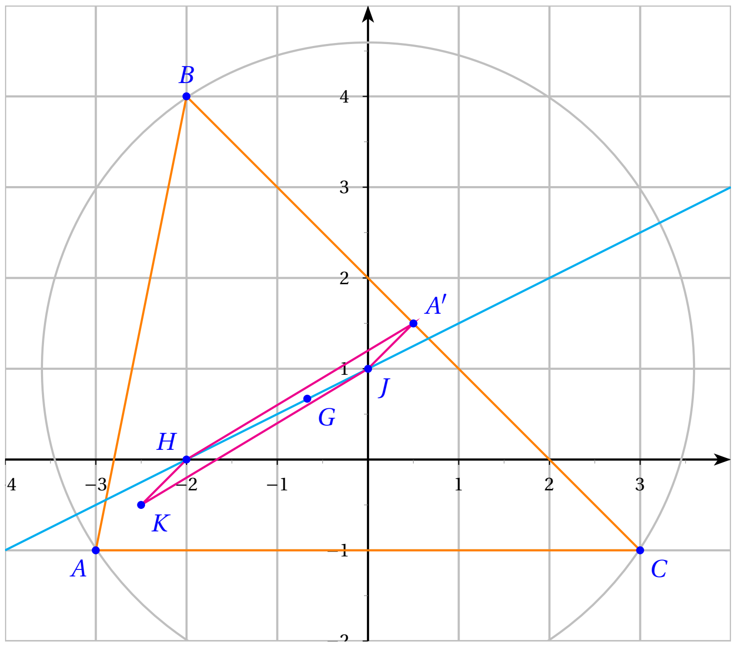
# Corrigé du baccalauréat S
# Antilles-Guyane 16 juin 2011

**EXERCICE 1** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

1. Figure :




2. $JA = \left|j - a\right| = |-3 - 2\text{i}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$. On trouve de même que $JB = \sqrt{13}$ et que $JC = \sqrt{13}$. Le cercle circonscrit au triangle $ABC$ a donc pour centre $J$ et pour rayon $\sqrt{13}$.

3. On a : $\dfrac{b-c}{h-a} = \dfrac{-5+5\text{i}}{1+\text{i}} = \dfrac{(-5+5\text{i})(1-\text{i})}{2} = 5\text{i}$.
Par conséquent : $\left(\overrightarrow{AH}\ ;\ \overrightarrow{CB}\right) = \arg(5\text{i}) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$, ce qui prouve que $(AH) \perp (BC)$.

4. $G$ est l'isobarycentre du système $\{A\ ;\ B;\ C\}$ donc, d'après le cours :
$$g = \frac{a+b+c}{3} = \frac{-3-i-2+4\text{i}+3-\text{i}}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\text{i}.$$

5. Le vecteur $\overrightarrow{HJ}$ a pour affixe $j - h = 2 + \text{i}$, le vecteur $\overrightarrow{JG}$ a pour affixe $g - j = -\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3}\text{i}$. On a donc $g - j = -\dfrac{1}{3}(j - h)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{JG} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{HJ}$. Ces deux vecteurs étant colinéaires, les points $J$, $G$ et $H$ sont donc alignés, ce qui se vérifie sur la figure.

6. **a.** Notons $k$ l'affixe du point $K$, alors : $k = \dfrac{a+h}{2} = \dfrac{-3-\text{i}-2}{2} = -\dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}$.

   **b.** Le vecteur $\overrightarrow{KH}$ a pour affixe $h - k = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$ et le vecteur $\overrightarrow{JA'}$ a pour affixe $a' - j = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$. Ces deux vecteurs ayant même affixe, ils sont égaux, et le quadrilatère $KHA'J$ est donc un parallélogramme.

**EXERCICE 2** **6 points**

**Commun à tous les candidats**

1. **a.** – Il n'y a aucune forme indéterminée, d'après les limites usuelles : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^x = +\infty$, donc par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   – La fonction $f$ est dérivable sur $[0~;~+\infty[$ comme combinaison simple de fonctions qui le sont, et, pour tout réel $x > 0$ : $f'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x$. Comme $x \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$, alors $f'(x) \geqslant 0$ et la fonction $f$ est donc strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$.

   **b.** La fonction $f$ est continue (car dérivable), strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $[0~;~+\infty[$ sur l'intervalle $\left[f(0)~;~\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[ = [-1~;~+\infty[$. Comme $0 \in [-1~;~+\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet donc une unique solution $\alpha$ dans $[0~;~+\infty[$.
   À l'aide de la calculatrice $\alpha \simeq 0{,}57$ à $10^{-2}$ près.

   **c.** $f(\alpha) = 0$ et $f$ est croissante sur $[0~;~+\infty[$, on en déduit donc que :
   – si $0 \leqslant x < \alpha$, alors $f(x) < 0$ ;
   – si $x > \alpha$, alors $f(x) > 0$.

2. **a.** Pour tout $x > 0$, on a $M(x~;~\mathrm{e}^x)$ et $N(x~;~\ln x)$. On a donc $MN = |\mathrm{e}^x - \ln x| = \mathrm{e}^x - \ln x$, d'après le rappel de l'énoncé. Posons $g(x) = \mathrm{e}^x - \ln x$, alors $g$ est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $g'(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{1}{x}$. On a donc, pour tout $x > 0$ :

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x\mathrm{e}^x - 1 > 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x > \alpha.$$

   Ainsi, $g$ est strictement croissante sur $]\alpha~;~+\infty[$ et décroissante sur $]0~;~\alpha[$. Elle admet donc un minimum en $x = \alpha$. La distance $MN$ est donc minimale lorsque $x = \alpha$ et cette longueur minimale vaut alors $\mathrm{e}^{\alpha} - \ln(\alpha) \simeq 2{,}33$ à $10^{-2}$ près.

   **b.** On a $f(\alpha) = 0$, donc $\alpha\mathrm{e}^{\alpha} - 1 = 0$, d'où $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha}$.
   La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\alpha$ a pour coefficient directeur le nombre dérivé de exp en $\alpha$, c'est-à-dire $\mathrm{e}^{\alpha}$.
   La tangente à $\Gamma$ au point d'abscisse $\alpha$ a pour coefficient directeur le nombre dérivé de ln en $\alpha$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{\alpha}$.
   D'après ce qui précède, ces deux valeurs sont égales ; les deux tangentes ayant le même coefficient directeur, elles sont donc parallèles.

3. **a.** $h$ est dérivable sur $]0~;~+\infty[$ comme combinaison simple de fonctions qui le sont, et, pour tout $x > 0$ : $h'(x) = x \times \dfrac{1}{x} + 1 \times \ln x - 1 = \ln x$. $h$ est donc une primitive de la fonction ln sur $]0~;~+\infty[$.

   **b.** $\mathscr{C}$ est au-dessus de $\Gamma$, donc, l'aire $\mathscr{A}$ hachurée sur la figure est donnée (en unités d'aire) par :

$$\mathscr{A} = \int_1^2 \mathrm{e}^x - \ln x\,\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x - h(x)\right]_1^2 = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - 2\ln 2 + 1 \simeq 4{,}28.$$

**EXERCICE 3** **4 points**

**Commun à tous les candidats**

1. L'évènement « le tireur atteint la cible au moins une fois » est le contraire de l'évènement « le tireur rate toujours sa cible ». On a donc $p_n = 1 - 0{,}7^n$. Par conséquent :

$$p_n \geqslant 0{,}9 \iff 1 - 0{,}7^n \geqslant 0{,}9 \iff 0{,}1 \geqslant 0{,}7^n \iff \ln(0{,}1) \geqslant n\ln(0{,}7) \iff$$

$\dfrac{\ln(0,1)}{\ln(0,7)} \leqslant n$.

Or $\dfrac{\ln(0,1)}{\ln(0,7)} \simeq 6{,}4$. La plus petite valeur possible de $n$ est donc 7 : **réponse b)**.

**2.** La probabilité que le moteur fonctionne sans panne pendant plus de 10 000 heures est : $p(X > 10000) = 1 - p(X \leqslant 10000) = 1 - \displaystyle\int_0^{10000} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1 - \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^{10000} = \mathrm{e}^{-0{,}0002\times 10000} = \mathrm{e}^{-2} \simeq 0{,}135$ : **réponse b)**.

**3.** Le nombre $X$ de fois où le joueur perd au cours d'une partie suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(5\ ,\ \frac{1}{6}\right)$, donc : $p(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \dfrac{125}{3888}$ : **réponse a)**.

**4.** $A$ et $B$ sont indépendants, donc $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.
L'égalité $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ devient donc :
$0{,}65 = 0{,}3 + p(B) - 0{,}3p(B)$, qui équivaut à $0{,}35 = 0{,}7p(B)$, d'où $p(B) = 0{,}5$ : **réponse a)**.

## EXERCICE 4 — 5 points

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

**1. a.** Les entiers 11 et 7 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Bézout, il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tels que $11u - 7v = 1$. Par ailleurs $11 \times 2 - 7 \times 3 = 1$, le couple (2 ; 3) répond alors à la question.

**b.** On a, en multipliant chaque membre de la dernière égalité par 5, $11 \times 10 - 7 \times 15 = 5$. Le couple (10 ; 15) est donc une solution particulière de (E).

**c.** Soit $(x\ ;\ y)$ une solution de (E), alors $11x - 7y = 11 \times 10 - 7 \times 15$, d'où :

$$11(x - 10) = 7(y - 15). \qquad (1)$$

7 divise $11(x - 10)$ et est premier avec 11, donc, d'après le théorème de Gauss, 7 divise $x - 10$ : il existe donc un entier relatif $k$ tel que $x - 10 = 7k$. En remplaçant $x - 10$ par $7k$ dans (1), puis en simplifiant, on en déduit que $y - 15 = 11k$. Ainsi, si $(x\ ;\ y)$ est solution de (E), alors nécessairement $(x\ ;\ y)$ est de la forme $(10 + 7k\ ;\ 15 + 11k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Réciproquement, on vérifie aisément que de tels couples sont bien solutions de (E).

**d.** Un point de $D$ à coordonnées entières appartient à $\mathscr{C}$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} x \in \mathbb{Z}\ ;\ y \in \mathbb{Z}\\ 11x - 7y = 5\\ 0 \leqslant x \leqslant 50\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant 50\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(x\ ;\ y) \text{ solution de (E)}\\ 0 \leqslant x \leqslant 50\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant 50\end{array}\right.$ On cherche donc tous les entiers relatifs $k$ tels que $0 \leqslant 10 + 7k \leqslant 50$ et $0 \leqslant 15 + 11k \leqslant 50$, ce qui équivaut à $-\dfrac{10}{7} \leqslant k \leqslant \dfrac{50}{7}$ et $-\dfrac{15}{11} \leqslant k \leqslant \dfrac{35}{11}$. Les seules valeurs possibles de $k$ sont $-1$, 0, 1, 2 et 3. Il y a donc cinq points de $\mathscr{C}$ donc les coordonnées sont entières :

$$A(3\ ;\ 4) \quad B(10\ ;\ 15) \quad C(17\ ;\ 26) \quad D(24\ ;\ 37) \quad E(31\ ;\ 48).$$

**2. a.** On a $11 \equiv 1\ (5)$, $7 \equiv 2\ (5)$ et $5 \equiv 0\ (5)$, par conséquent, si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), en « passant » aux congruences : $11x^2 - 7y^2 = 5$ devient $x^2 - 2y^2 \equiv 0\ (5)$, c'est-à-dire $x^2 \equiv 2y^2\ (5)$.

**b.** On calcule aisément :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Modulo 5, $x$ est congru à | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Modulo 5, $x^2$ est congru à | 0 | 1 | 4 | 4 | 1 |

| Modulo 5, $y$ est congru à | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| Modulo 5, $2y^2$ est congru à | 0 | 2 | 3 | 3 | 2 |

Les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de $x^2$ par 5 sont donc 0, 1 et 4. De même, les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de $2y^2$ par 5 sont 0, 2 et 3.

**c.** Si $(x\ ;\ y)$ est solution de (F), alors $x^2 \equiv 2y^2$ (5) ce qui n'est possible, d'après les tableaux précédents, que si $x \equiv 0$ (5) et $y \equiv 0$ (5), c'est-à-dire si $x$ et $y$ sont des multiples de 5.

**3.** Supposons que $x$ et $y$ sont deux entiers multiples de 5. Alors il existe des entiers $a$ et $b$ tels que $x = 5a$ et $y = 5b$. En « réinjectant » cela dans l'équation (F) on a alors : $11 \times 25a^2 - 7 \times 25b^2 = 5$, c'est-à-dire $25(11a^2 - 7b^2) = 5$, ce qui est impossible (5 n'est pas multiple de 25 !). L'équation (F) ne possède donc aucune solution.

**EXERCICE 4** **5 points**

**Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

**1.** $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = 1 \times 1 - 3 \times 0 + 1 \times (-1) = 0$, donc $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{w}$. La droite $\Delta$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u'}\,(-1\ ;\ 1;\ -1)$ et $\overrightarrow{u'} \cdot \overrightarrow{w} = 0$, donc $\overrightarrow{u'} \perp \overrightarrow{w}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ dirigent respectivement $D$ et $D'$ et sont orthogonaux à $\overrightarrow{w}$ qui est donc un vecteur directeur de $\Delta$.

**2.** **a.** $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 3-6+3 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{u}$ ; de même, $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{w} = 3-3 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{w}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ n'étant pas pas colinéaires, ils forment une base du plan $P$, et le vecteur $\overrightarrow{n}$ est donc normal à ce plan.

**b.** $P$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\,(3\ ;\ 2\ ;\ 3)$. Une équation cartésienne de $P$ est donc : $3x + 2y + 3z + d = 0$, où $d$ est un réel à déterminer. Comme $A(3\ ;\ -4\ ;\ 1) \in P$, on a : $3 \times 3 + 2 \times (-4) + 3 \times 1 + d = 0$, d'où $d = -4$. Une équation cartésienne de $P$ est donc : $3x + 4y + 3z - 4 = 0$.

**3.** **a.** $H'$ est un point de $D'$, il existe donc un réel $t$ tel que $H'(-1-t\ ;\ 2+t\ ;\ 1-t)$. Par ailleurs $H' \in P$, donc $3(-1-t) + 4(2+t) + 3(1-t) - 4 = 0$, d'où, en développant, $-4t = 0$ puis $t = 0$, ce qui donne $H'(-1\ ;\ 2\ ;\ 1)$.

**b.** La droite $\Delta$ passe par $H'(-1\ ;\ 2\ ;1)$ et est dirigée par $\overrightarrow{w}\,(1\ ;\ 0\ ;\ -1)$. Une représentation paramétrique de $\Delta$ est donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& -1+s \\ y &=& 2 \qquad (s \in \mathbb{R}) \\ z &=& 1-s \end{array}\right.$$

**4.** **a.** $H \in D$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AH} = \lambda\overrightarrow{u}$, d'où l'on déduit $H(3+\lambda\ ;\ -4-3\lambda\ ;\ 1+\lambda)$. De plus $H$ est un point commun aux droites $D$ et $\Delta$, il existe donc une valeur de $s$ et une valeur de $\lambda$ telles que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -1+s &=& 3+\lambda \\ 2 &=& -4-3\lambda \\ 1-s &=& 1+\lambda \end{array}\right.$$

L'équation du milieu donne $\lambda = -2$ et les deux autres donnent alors $s = 2$ ; on en déduit que $H(1\ ;\ 2\ ;\ -1)$.

**b.** $HH' = \sqrt{(-1-1)^2 + (2-2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

**5.** **a.** D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'}$. Posons $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}$, alors $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{HH'}$ car $(MH) \perp (HH')$ et $(H'M') \perp (HH')$.

**b.** $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{v}$, donc $\left(\overrightarrow{MM'}\right)^2 = \left(\overrightarrow{HH'}\right)^2 + 2\overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$, comme $\overrightarrow{HH'} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, il reste $MM' = HH'^2 + \left|\left|\overrightarrow{v}\right|\right|^2$, d'où : $MM'^2 \geqslant HH'^2$.
La plus petite distance possible entre deux points de $D$ et de $D'$ est donc obtenue pour les points $H$ et $H'$. La distance entre les droites $D$ et $D'$ est donc égale à $2\sqrt{2}$.